Приложение на метода на граничните елементи в механика на твърдото деформируемо тяло

гл. ас. д-р инж. Иво Драганов

Частни диференциални уравнения

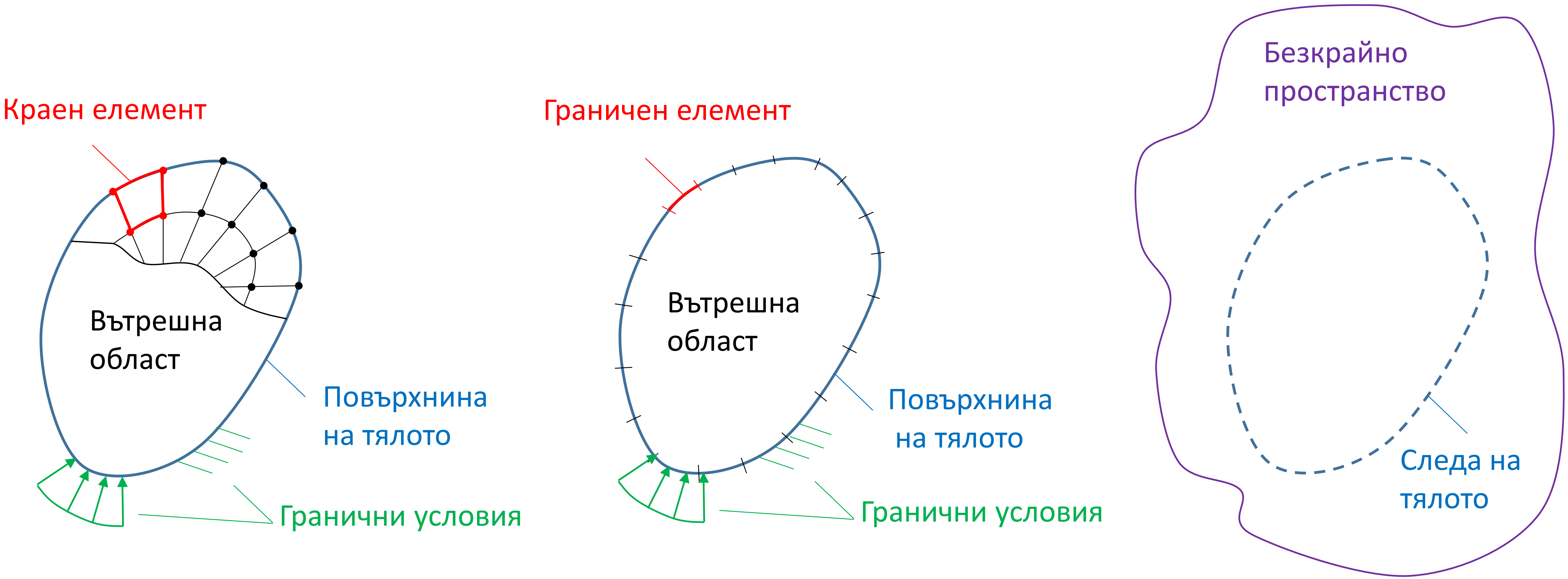
ЧДУ от втори ред, първа степен (линейни):

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cdots = 0$$

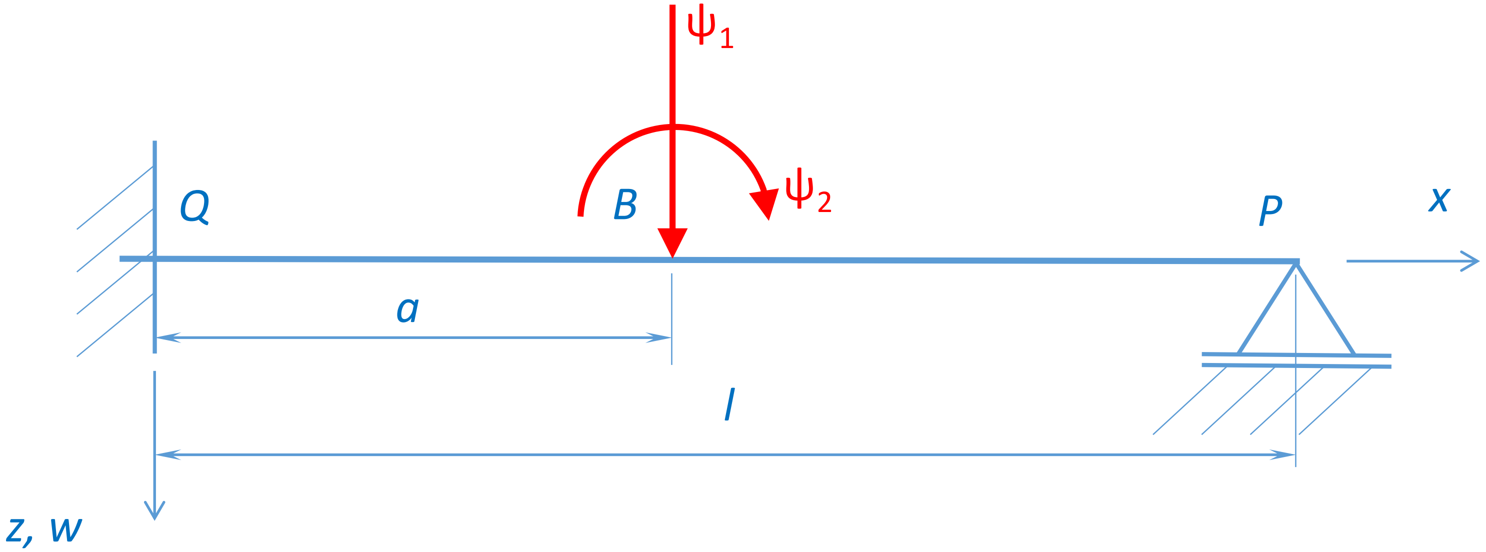
Класификация

Вид	Условие	Представител	Уравнение
Хиперболични	$B^2 - 4AC > 0$	Вълново уравнение	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Параболични	$B^2 - 4AC = 0$	Уравнение на топлопроводността	$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
Елиптични	$B^2 - 4AC < 0$	Уравнения на Лаплас и Поасон	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$

МКЕ и МГЕ


Краен елемент
Вътрешна област
Повърхнина на тялото
Гранични условия
Граничен елемент
Вътрешна област
Повърхнина на тялото
Гранични условия
Безкрайно пространство
Следа на тялото

Задача за греда



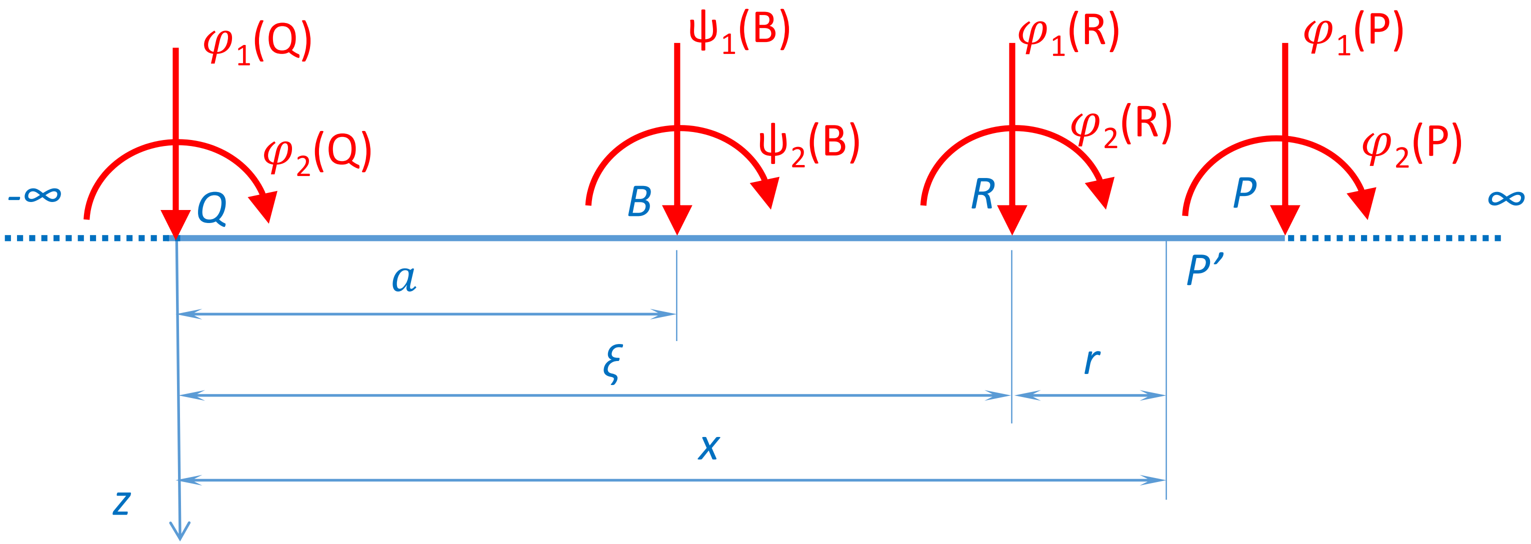
Гранични условия

$$w(Q) = 0; \qquad \theta(Q) = \frac{dw(Q)}{dx} = 0; \qquad w(P) = 0; \qquad m(P) = -EI\frac{d^2w(P)}{dx^2} = 0.$$

Диференциално уравнение

$$\frac{d^4w}{dx^4} = 0$$

Фундаментално решение в неограничена област



Фундаментални решения за φ_1:

$$w(x) = \varphi_1 \frac{1}{12EI} l^3 \left(2 + \left|\frac{r}{l}\right|^3 - 3\left|\frac{r}{l}\right|^2\right) = \varphi_1(\xi) G(x,\xi);$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \varphi_1 \frac{3}{12EI} l^2 \left|\frac{r}{l}\right| \left(\left|\frac{r}{l}\right| - 2\right) \operatorname{sgn}\frac{r}{l} = \varphi_1(\xi) F(x,\xi);$$

$$m(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = \varphi_1 \frac{l}{2}\left(1 - \left|\frac{r}{l}\right|\right) = \varphi_1(\xi) E(x,\xi);$$

$$s(x) = -EI\frac{d^3w}{dx^3} = -\varphi_1 \operatorname{sgn}\frac{r}{2l} = \varphi_1(\xi) D(x,\xi).$$

Фундаментални решения за φ_2:

$$w(x) = \varphi_2 \frac{1}{12EI} l^2 \left|\frac{r}{l}\right| \left(\left|\frac{r}{l}\right|^2 - 3\left|\frac{r}{l}\right| + 2\right) \operatorname{sgn}\frac{r}{l} = \varphi_2(\xi) K(x,\xi);$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = -\varphi_2 \frac{1}{12EI} l \left(3\left|\frac{r}{l}\right|^2 - 6\left|\frac{r}{l}\right| + 2\right) = \varphi_2(\xi) L(x,\xi);$$

$$m(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = -\varphi_2 \left(1 - \left|\frac{r}{l}\right|\right)\left(\operatorname{sgn}\frac{r}{l}\right)/2 = \varphi_2(\xi) M(x,\xi);$$

$$s(x) = -EI\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{\varphi_2}{2l} = \varphi_2(\xi) N(x,\xi).$$

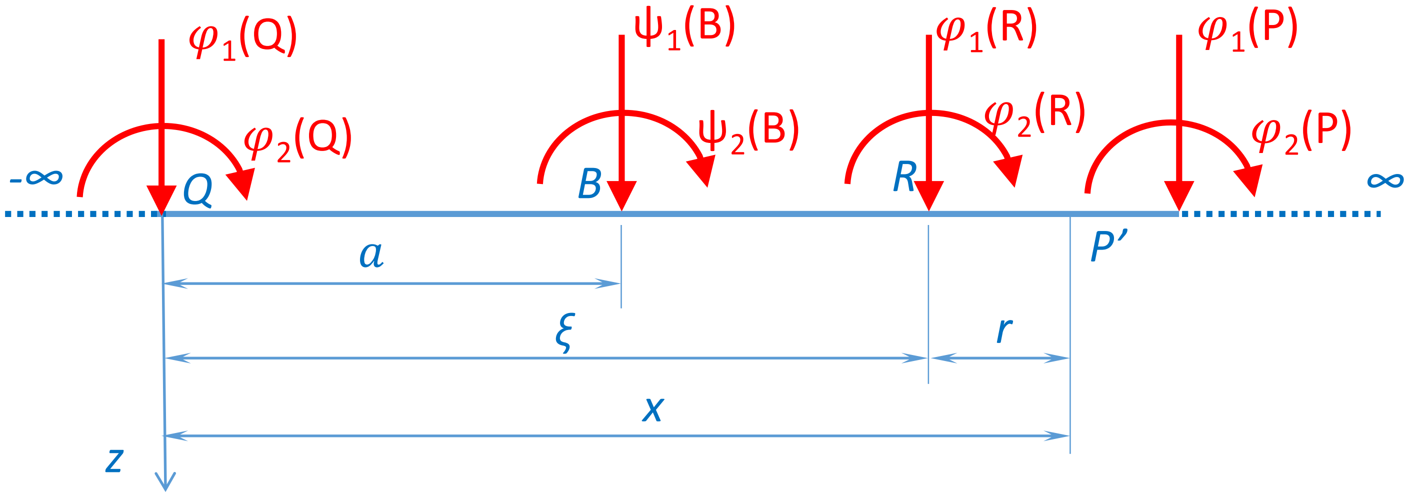
Натоварване

Обобщени сили в двата края

$$\varphi(Q) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(Q) \\ \varphi_2(Q) \end{Bmatrix} \qquad \varphi(P) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(P) \\ \varphi_2(P) \end{Bmatrix}$$

Зададено натоварване

$$\psi(B) = \begin{Bmatrix} \psi_1(B) \\ \psi_2(B) \end{Bmatrix}$$



За всяка вътрешна точка P’ е в сила

$$w(x) = \varphi_1(Q)G(x,0) + \varphi_2(Q)K(x,0) + \varphi_1(P)G(x,l) + \varphi_2(P)K(x,l) + \psi_1(B)G(x,\xi_1) + \psi_2(B)K(x,\xi_1);$$

$$\theta(x) = \varphi_1(Q)F(x,0) + \varphi_2(Q)\bar{L}(x,0) + \varphi_1(P)F(x,l) + \varphi_2(P)\bar{L}(x,l) + \psi_1(B)F(x,\xi_1) + \psi_2(B)L(x,\xi_1);$$

$$m(x) = \varphi_1(Q)E(x,0) + \varphi_2(Q)M(x,0) + \varphi_1(P)E(x,l) + \varphi_2(P)M(x,l) + \psi_1(B)E(x,\xi_1) + \psi_2(B)M(x,\xi_1);$$

$$s(x) = \varphi_1(Q)D(x,0) + \varphi_2(Q)N(x,0) + \varphi_1(P)D(x,l) + \varphi_2(P)N(x,l) + \psi_1(B)D(x,\xi_1) + \psi_2(B)N(x,\xi_1).$$

Матричен запис

Матричен запис

$$\begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ m(x) \\ s(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G(x,0) & K(x,0) & G(x,l) & K(x,l) \\ F(x,0) & L(x,0) & F(x,l) & L(x,l) \\ E(x,0) & M(x,0) & E(x,l) & M(x,l) \\ D(x,0) & N(x,0) & D(x,l) & N(x,l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1(Q) \\ \varphi_2(Q) \\ \varphi_1(P) \\ \varphi_2(P) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G(x,\xi_1) & K(x,\xi_1) \\ F(x,\xi_1) & L(x,\xi_1) \\ E(x,\xi_1) & M(x,\xi_1) \\ D(x,\xi_1) & N(x,\xi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1(B) \\ \psi_2(B) \end{Bmatrix}$$

Граници

$$\begin{Bmatrix} w(Q) \\ \theta(Q) \\ w(P) \\ m(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{6EI} & \frac{l^2}{4EI} & \frac{l}{12EI} \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{24EI} & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1(Q) \\ \varphi_2(Q) \\ \varphi_1(P) \\ \varphi_2(P) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l^3}{12EI}\left(3 + \frac{\xi_1^3}{l^3} - 3\frac{\xi_1^2}{l^2}\right) & \frac{l\xi_2}{12EI}\left(\frac{\xi_2^2}{l^2} - 3\frac{\xi_2}{l} + 2\right) \\ -\frac{l\xi_1}{4EI}\left(\frac{\xi_1}{l} - 2\right) & -\frac{l}{12EI}\left(3\frac{\xi_2^2}{l^2} - 6\frac{\xi_2}{l} + 2\right) \\ \frac{l^3}{12EI}\left(2 + \frac{l^3 - \xi_1^3}{l^3} - 3\frac{l^2 - \xi_1^2}{l}\right) & -\frac{l^2 - l\xi_2}{12EI}\left(\frac{l^2 - \xi_2^2}{L^2} - 3\frac{l - \xi_2}{l}\right) \\ \xi_1/2 & -\frac{\xi_2}{2l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{w(Q), \theta(Q), w(P), m(P)\} = \{0,0,0,0\};$$

Премествания като твърдо тяло

Въвеждане на произволно преместване по ос z - C_1

$$\varphi_1(Q) + \varphi_1(P) + \psi_1\,(B_1) = \sum \varphi_1 + \sum \psi_1 = 0.$$

Въвеждане на произволен ъгъл на завъртане - C_2

$$\varphi_2(Q) + \varphi_2(P) + \psi_2\,(B_2) = \sum \varphi_2 + \sum \psi_2 = 0.$$

Разширена система от уравнения

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\ \hline 0\\0\end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & 0\\ & & & & 0 & 1\\ & & & & 1 & 0\\ & & & & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varphi}(Q)\\ \boldsymbol{\varphi}(P)\\ C_1\\ C_2\end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} & \\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{Bmatrix}$$

Пряк МГЕ

Основно диференциално уравнение

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \psi_1(x)$$

ψ_1 - интензитет на разпределения товар.

Въвеждане на гладка функция G и интегриране на основното диференциално уравнение

$$\int_0^L (d^4w(x)/dx^4)\, G dx = \int_0^L \psi_1(x)\, G dx;$$

$G(x, \xi)$ е решение на уравнението

$$\frac{d^4G}{dx^4} = \delta(x, \xi)$$

и се отъждествява с някакво вертикално преместване:

$$w^* \equiv G$$

Интегрално уравнение

Интегрално уравнение

$$[-w^*(x,\xi)s(x)+\theta^*(x,\xi)m(x)]_0^L+\int_0^L m^*(x,\xi)m(x)dx=\int_0^L \psi_1(x)\,w^*(x,\xi)dx$$

В сила са тъждествата:

$$\theta^*\equiv dG/dx \qquad m^*\equiv -d^2G/dx^2 \qquad s^*\equiv -d^3G/dx^3$$

След двукратно интегриране се получава

$$[-w^*(x)s(x)+\theta^*(x)m(x)]_0^L-\int_0^L \psi_1(x)w^*(x)dx=[-w(x)s^*(x)+\theta(x)m^*(x)]_0^L\int_0^L \psi_1^*(x)\,w(x)dx$$

Използване функцията на Дирак

$$-w(\xi)=\left[G\frac{d^3w}{dx^3}-\frac{dG}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2G}{dx^2}\frac{dw}{dx}-\frac{d^3G}{dx^3}\right]_0^L-\int_0^L \psi_1(x)\,Gdx$$

Функция G

$$G(x,\xi) = \frac{l^3}{12EI}\left(2 + \left|\frac{r}{l}\right|^3 - 3\left|\frac{r}{l}\right|^2\right)$$

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx} = F(x,\xi) = \frac{3l^3}{12EI}\left|\frac{r}{l}\right|\left(\left|\frac{r}{l}\right| - 2\right)$$

$$-\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2} = E(x,\xi) = \frac{l}{2}\left|\frac{r}{l}\right|\left(1 - \left|\frac{r}{l}\right|\right)$$

$$-\frac{d^3G(x,\xi)}{dx^3} = D(x,\xi) = -0{,}5\operatorname{sgn}(\frac{r}{l})$$

$$G'(x,\xi) = \frac{dG(x,\xi)}{d\xi} = \frac{3l^2}{12EI}\left|\frac{r}{l}\right|\left(\left|\frac{r}{l}\right| - 2\right)\operatorname{sgn}(\frac{r}{l})$$

$$F'(x,\xi) = \frac{dF(x,\xi)}{d\xi} = \frac{6l}{12EI}\left(1 - \left|\frac{r}{l}\right|\right)$$

$$E'(x,\xi) = \frac{dE(x,\xi)}{d\xi} = 0{,}5\operatorname{sgn}(\frac{r}{l})$$

$$D'(x,\xi) = \frac{dD(x,\xi)}{d\xi} = 0$$

Преместване и завъртане

Преместване

$$-w(\xi) = [-G(L,\xi)s(L) + G(0,\xi)s(0) + F(L,\xi)m(L) - F(0,\xi)m(0)] +$$
$$+[-E(L,\xi)\theta(L) + E(0,\xi)\theta(0) + D(L,\xi)w(L) - D(0,\xi)w(0)] - \int_0^L G(x,\xi)\psi_1(x)\,dx$$

Завъртане

$$-\theta(\xi) = [-G'(L,\xi)s(L) + G'(0,\xi)s(0) + F'(L,\xi)m(L) - F'(0,\xi)m(0)] +$$
$$+[-E'(L,\xi)\theta(L) + E'(0,\xi)\theta(0) + D'(L,\xi)w(L) - D'(0,\xi)w(0)] - \int_0^L G'(x,\xi)\psi_1(x)\,dx$$

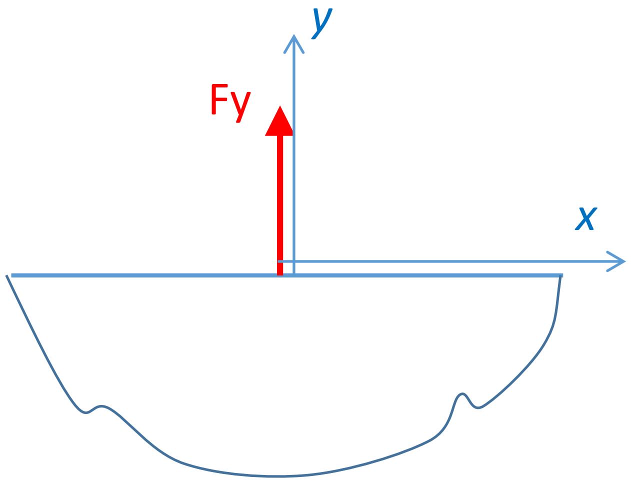
Матрично уравнение

$$-\begin{Bmatrix} w(L-\varepsilon) \\ w(0+\varepsilon) \\ \theta(L-\varepsilon) \\ \theta(0+\varepsilon) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -G(L,L-\varepsilon) & G(0,L-\varepsilon) & F(L,L-\varepsilon) & -F(0,L-\varepsilon) \\ -G(L,0+\varepsilon) & G(0,0+\varepsilon) & F(L,0+\varepsilon) & -F(0,0+\varepsilon) \\ -G'(L,L-\varepsilon) & G'(0,L-\varepsilon) & F'(L,L-\varepsilon) & -F'(0,L-\varepsilon) \\ -G'(L,0+\varepsilon) & G'(0,0+\varepsilon) & F'(L,0+\varepsilon) & -F'(0,0+\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(L) \\ s(0) \\ m(L) \\ m(0) \end{Bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} D(L,L-\varepsilon) & -D(0,L-\varepsilon) & -E(L,L-\varepsilon) & E(0,L-\varepsilon) \\ D(L,0+\varepsilon) & -D(0,0+\varepsilon) & -E(L,0+\varepsilon) & E(0,0+\varepsilon) \\ D'(L,L-\varepsilon) & -D'(0,L-\varepsilon) & -E'(L,L-\varepsilon) & E'(0,L-\varepsilon) \\ D'(L,0+\varepsilon) & -D'(0,0+\varepsilon) & -E'(L,0+\varepsilon) & E'(0,0+\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(L) \\ w(0) \\ \theta(L) \\ \theta(0) \end{Bmatrix} -$$

$$-\begin{Bmatrix} \int_0^L G(x,L-\varepsilon)\psi_1(x)\,dx \\ \int_0^L G(x,0+\varepsilon)\psi_1(x)\,dx \\ \int_0^L G'(x,L-\varepsilon)\psi_1(x)\,dx \\ \int_0^L G'(x,0+\varepsilon)\psi_1(x)\,dx \end{Bmatrix}.$$

Задача на Фламан



Напрежения

$$\sigma_{yy} = -\frac{2}{\pi} F_y \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2}{\pi} F_y \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{2}{\pi} F_y \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Премествания

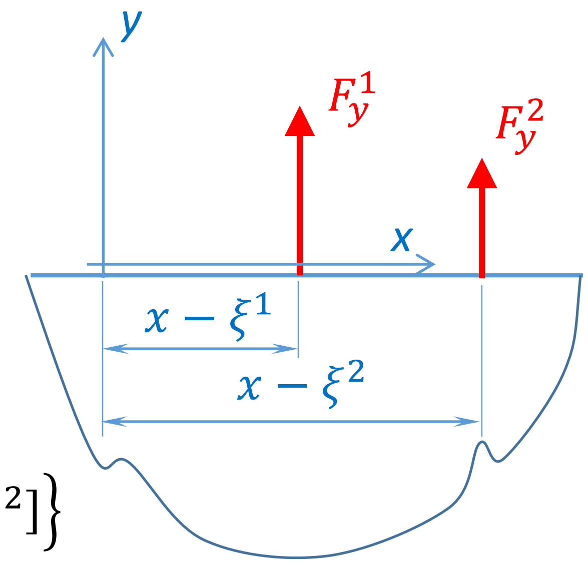
$$u_x = \frac{F_y}{2\pi G}\left[(1-2\nu)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{xy}{x^2 + y^2}\right]$$

$$u_y = \frac{F_y}{2\pi G}\left[-2(1-\nu)\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{L^2}\right)^{1/2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right]$$

Две сили

Преместване

$$u_y = F_y^1 I(x-\xi^1, y) + F_y^2 I(x-\xi^2, y)$$



Функция на влияние

$$I(x-\xi^2, y) = \frac{1}{2\pi G}\left\{-2(1-\nu)\left[\ln\sqrt{(x-\xi^2)+y^2} - \ln|L-\xi^2|\right] + y^2/[(x-\xi^2)^2+y^2]\right\}$$

Напрежения

$$\sigma_{xy} = 0, -\infty \le x \le \infty, y = 0$$

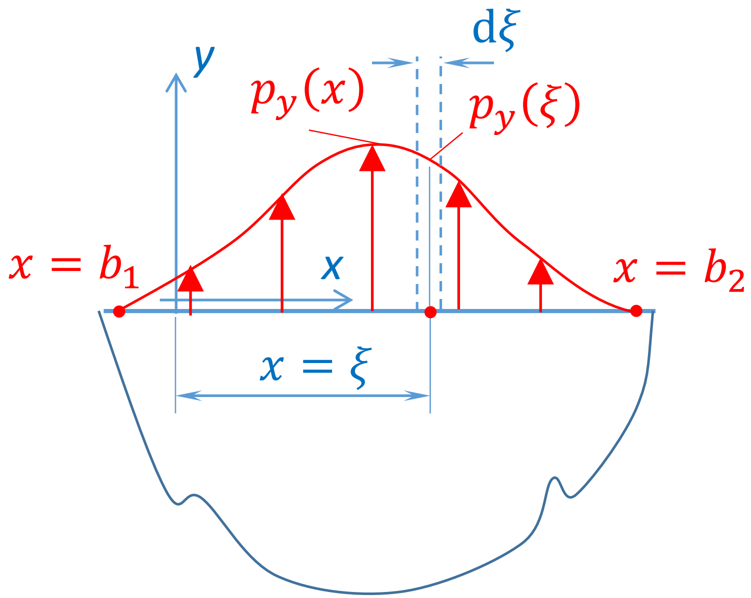
$$\sigma_{yy} = \begin{cases} p_y(x), b_1 \le x \le b_2, y = 0 \\ 0, \text{при другите ст} - \text{сти на x} \end{cases}$$

Приложение на МГЕ в механика на твърдото деформируемо тяло

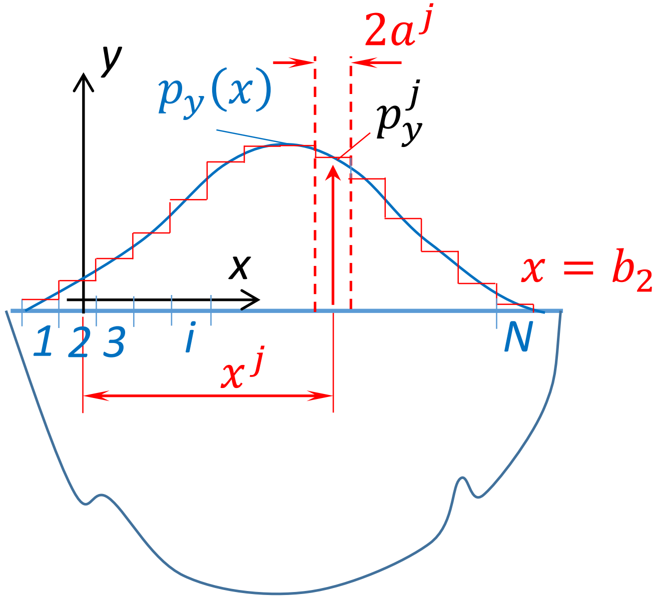
Задача на Бусинек

Joseph Valentin
Boussinesq
1842-1929

Аналитично решение



Числено решение

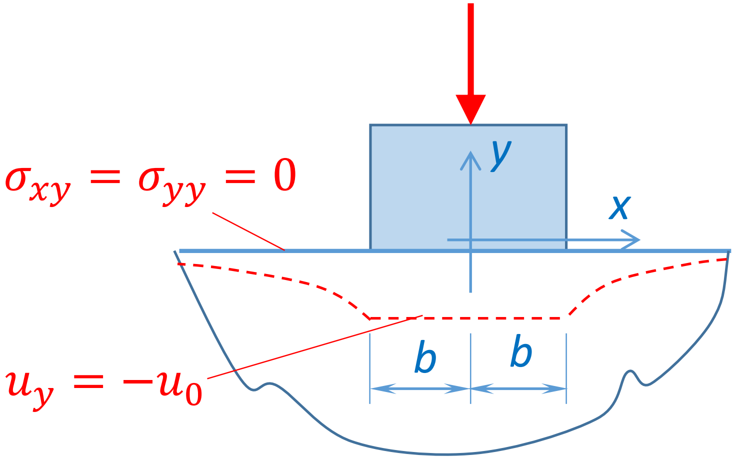


$$F_y(\xi) = p_y(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_y = \frac{1}{2\pi G}\int_{b_1}^{b_2}\left\{-2(1-\nu)\left[\ln\sqrt{(x-\xi^2)+y^2} - \ln|L-\xi^2|\right] + y^2/[(x-\xi^2)^2+y^2]\right\}p_y(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Пример

Постановка на задачата



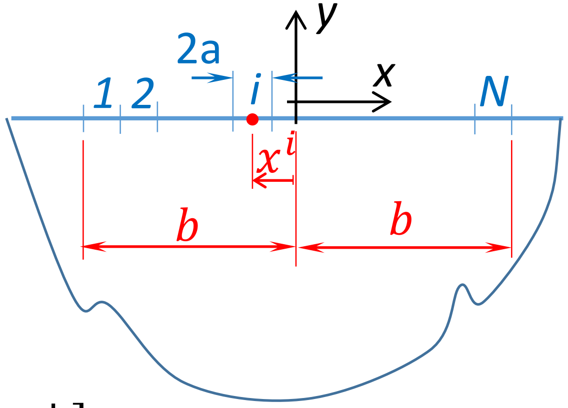
Гранични условия

$u_y = -u_0,\ |x| \le b,\ y = 0$

$\sigma_{xy} = 0,\quad |x| < \infty,\ y = 0$

$\sigma_{yy} = 0,\quad |x| > b,\ y = 0$

Числена процедура



$$u_y = -\frac{1-\nu}{\pi G} P_y[(x+a)\ln|x+a| - (x-a)\ln|x-a| +,$$
$$+(L-a)\ln|L-a| - (L+a)\ln|L+a|\,]$$

$$u_y(x^i,0) = -\frac{1-\nu}{\pi G} T_y^i\left[(x^i - x^j + a)\ln|x^i - x^j + a| - (x^i - x^j - a)\ln|x^i - x^j - a| +,\right.$$
$$\left.+(L - x^j - a)\ln(L - x^j - a) - (L - x^j + a)\ln(L - x^j + a)\right],$$

$$u_y^i = u_y(x^i,0) = \sum_{j=1}^{N} B^{ij} T_y^i,$$

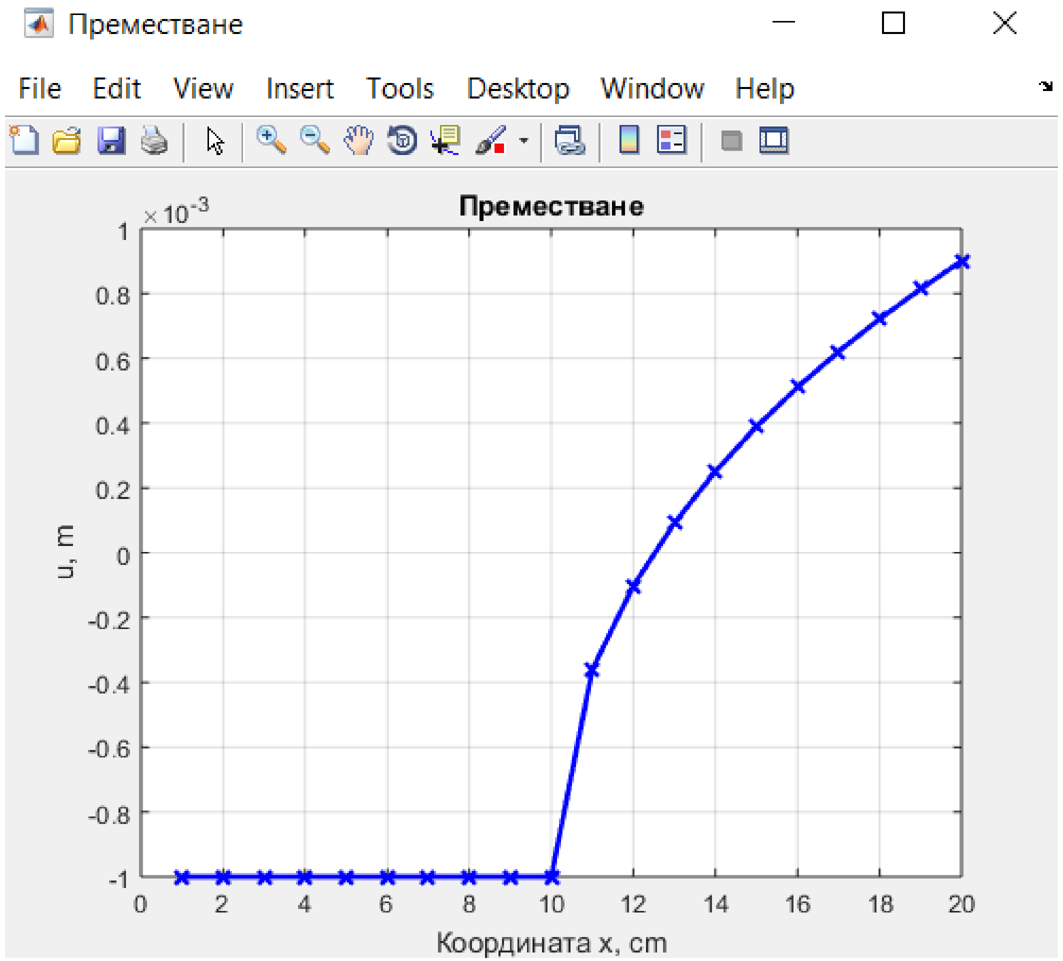
Коефициенти на влияние

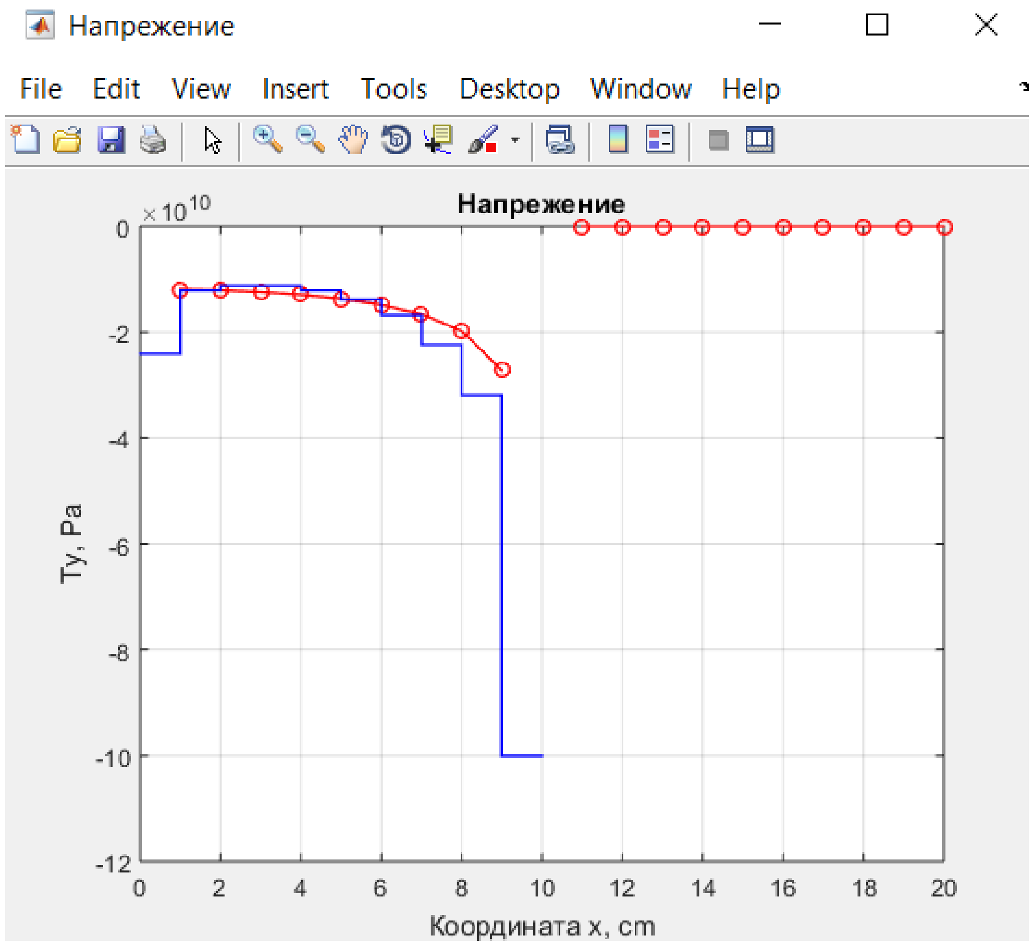
$$B^{ij} = -\frac{1-\nu}{\pi G}\left[(x^i - x^j + a)\ln|x^i - x^j + a| - (x^i - x^j - a)\ln|x^i - x^j - a| +\right.$$
$$\left.+(L - x^j - a)\ln(L - x^j - a) - (L - x^j + a)\ln(L - x^j + a)\right],$$

СЛУ

$$u_y^i = u_0 = \sum_{j=1}^{N} B^{ij} T_y^i, \qquad i = 1,2,\dots,N$$

Пример – компютърна реализация





Литература

Бенерджи П., Р. Баттерфилд. Методы граничных элементов в прикладных науках. Москва „Мир“ 1984.

Крауч С., А. Старфилд. Методы граничных элементов в механике твердого тела. Москва „Мир“ 1987.

Благодаря за вниманието!